118

(1) 次の 3 条件(A)，(B)，(C)を満たす整数の組$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$の個数を求めよ。

(A) $a_1 \geq 1$ (B) $a_5 \leq 4$ (C) $a_i \leq a_{i+1}$ $(i = 1,2,3,4)$

(2) 次の 3 条件(A)，(B)，(C)を満たす整数の組$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$の個数を求めよ。

(A) $a_1 \geq 1$ (B) $a_i \geq 0$ $(i = 2,3,4,5)$ (C) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 4$

(3) n桁の自然数で各桁の数字の合計がr以下となるものの個数をn, rを用いて表せ。

ただし，$n \geq 1$，$r \leq 9$とする。

（2006 東京医科歯科大学）

解

(1)

整数が入る〇を 5 つ，整数の仕切り｜を 3 つ用意し，並べる。

このとき｜の両側に入る数字について，

左端の｜の左側を 1，右側を 2

真ん中の｜の左側を 2，右側を 3

右端の｜の左側を 3，右側を

と約束する。

たとえば，

〇｜｜｜〇〇〇〇ならば整数の組は$(1,4,4,4,4)$

｜〇〇｜〇〇｜〇ならば整数の組は$(2,2,3,3,4)$となる。

そうすることにより，〇5 つと｜3 つの順列と整数の組が 1 対 1 に対応する。

よって，求める整数の組合せは，

〇5 つと｜3 つの順列より，$\dfrac{8!}{5!\cdot 3!} = 56$ 通り

あるいは，8 個の箱に｜を 3 つ入れる選び方より，${}_8C_3 = 56$ 通り

次に，各組の整数をa_1, a_2, a_3, a_4, a_5に配分するのだが，

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$より，その配分の仕方は 1 通りしかない。

たとえば，

整数の組が$(1,4,4,4,4)$ならば$a_1 = 1$，$a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 4$

整数の組が$(2,2,3,3,4)$ならば$a_1 = a_2 = 2$，$a_3 = a_4 = 3$，$a_5 = 4$

よって，求める個数は，$56 \times 1 = 56$ 個 ・・・(答)

別解

何種の整数の組にするかで排反に分類する。

同じ整数のみからなる組の個数

整数の選び方：4 通り

どの整数を何個にするかの配分の仕方：1 通り

よって，4×1＝4 個

異なる 2 つの整数からなる組の個数

整数の選び方＝${}_4C_2$＝6 通り

どの整数を何個にするかの配分の仕方：(4,1)，(3,2)，(2,3)，(1,4)の 4 通り

よって，6×4＝24 個

異なる 3 つの整数からなる組の個数

整数の選び方＝${}_4C_3$＝4 通り

どの整数を何個にするかの配分の仕方：(3,1,1)，(1,3,1)，(1,1,3)，(2,2,1)，(2,1,2)，(1,2,2)
の 6 通り

よって，4×6＝24 個

異なる 4 つの整数からなる組の個数

整数の選び方：1 通り

どの整数を何個にするかの配分の仕方：(2,1,1,1)、(1,2,1,1)、(1,1,2,1)、(1,1,1,2)
の 4 通り

よって，1×4＝4 個

以上より，整数の組は全部で 56 個ある。

次に，各組の整数を a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 に配分するのだが，

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$ より，その配分の仕方は 1 通りしかない。

たとえば，

整数の組が $(1,4,4,4,4)$ ならば $a_1 = 1$，　$a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 4$

整数の組が $(2,2,3,3,4)$ ならば $a_1 = a_2 = 2$，　$a_3 = a_4 = 3$，　$a_5 = 4$

よって，求める個数は，$56 \times 1 = 56$ 個　・・・(答)

(2)

$b_1 = a_1$

$b_2 = a_1 + a_2$

$b_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$b_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$b_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

とすると，

$b_1 = a_1 \geq 1$ より， b_1 は(1)の条件(A)を満たす。

$b_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 4$ より， b_5 は(1)の条件(B)を満たす。

$b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_4 \leq b_5$ より， $b_i \leq b_{i+1}$ であり， これは(1)の条件(C)を満たす。

よって，整数 $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ の組の個数は(1)と同じ 56 個である。

また、任意の $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ の組に対し，

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (b_1, b_2 - b_1, b_3 - b_2, b_4 - b_3, b_5 - b_4)$ より，

整数の組 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ が 1 対 1 に対応する。

よって，整数の組 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ の個数も 56 個　・・・(答)

別解

$a_1' = a_1 - 1$ とおくと $a_1' \geq 0$

また， $(a_1'+1) + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 4$ より，

$a_1' + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 3$

ここで， $a_1' + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + d = 3$ となるように 0 以上の整数 d を加えると，

これを満たす 6 個の整数の組は， $(3,0,0,0,0,0)$， $(2,1,0,0,0,0)$， $(1,1,1,0,0,0)$

これを $a_1', a_2, a_3, a_4, a_5, d$ に分ける方法は，

整数の組が $(3,0,0,0,0,0)$ の場合

a_1' ～ d のどれか 1 つが 3 となる場合の数より，6 通り

整数の組が $(2,1,0,0,0,0)$ の場合

a_1' ～ d のどれか 1 つが 2， どれか 1 つが 1 となる場合の数より， $6 \times 5 = 30$ 通り

整数の組が $(1,1,1,0,0,0)$ の場合

a_1' ～ d のどれか 3 つが 1 となる場合の数より， ${}_6\mathrm{C}_3 = 20$ 通り

よって、全部で 56 通り

これより，

整数の組 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ の個数も 56 個

(3)

1 桁目の数から順に $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_i, \cdots a_n$ とおくと，

$a_1 \geq 1$， $a_i \geq 0(i = 2,3,\cdots, n)$， $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq r$

ここで， $b_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_i$ とすると，

$b_1 = a_1 \geq 1$， $b_i \leq b_{i+1}$， $b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq r$ より，

整数の組 $(b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n)$ に与えられた条件は，(1)の条件と同様である。

よって，(1)の解法と同様にしてその整数の組を求めることができる。

つまり， n 個の○と $r-1$ 個の仕切り｜の順列の個数×1 の値が

整数の組 $(b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n)$ の個数となる。

よって， $\dfrac{\{n + (r-1)\}!}{n! \cdot (r-1)!} = \dfrac{(n + r - 1)!}{n! \cdot (r-1)!}$ 個

また， $(a_1 a_2, a, \cdots, a_i, \cdots, a_n) = (b_1, b_2 - b_1, b_3 - b_2, \cdots, b_i - b_{i-1}, \cdots, b_n - b_{n-1})$ より，

整数の組 $(b_1, b_2, b_3, \cdots, b_i, \cdots b_n)$ と各桁の整数の組 $(a_1 a_2, a, \cdots, a_i, \cdots, a_n)$ とが

1 対 1 に対応する。

よって，各桁の数字の組は全部で $\dfrac{(n + r - 1)!}{n! \cdot (r-1)!}$ 個　・・・(答)